Technische Universität Ilmenau
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
FG Nachrichtentechnik

Übungsaufgaben
zur Lehrveranstaltung

Nachrichtentechnik

Stand: Oktober 2006

1 Informationstheorie

1.1 Geben Sie die optimale Fragestrategie zum Erraten eines Zeichens der Menge A, B, C, D, E, F, G, H an. (Da keine statistischen Angaben vorliegen, ist von gleichwahrscheinlichen unabhängigen Symbolen auszugehen.)

1.2 Berechnen Sie für eine Binärquelle, welche die statistisch unabhängigen Symbole „0“ und „1“ mit den Wahrscheinlichkeiten $p(0) = p_0 = 0,01$ und $p(1) = p_1 = 0,99$ emittiert,

(a) die Informationsinhalte I_i, $i \in \{0, 1\}$, der Symbole,

(b) die Entropie H.

1.3 Gegeben ist eine Binärquelle, die die Symbole „0“ und „1“ emittiert. Die Auftrittswahrscheinlichkeit des Symbols „0“ ist mit $p(0) = p_0$ gegeben. Berechnen Sie

(a) die Auftrittswahrscheinlichkeit p_1 des Symbols „1“,

(b) die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1, für die die Entropie ihr Maximum erreicht.

(c) Stellen Sie die Entropie der Quelle in Abhängigkeit von p_0 graphisch dar.

1.4 Eine Nachrichtenquelle gibt die statistisch unabhängigen Zeichen A, B, C, D, E mit den Wahrscheinlichkeiten 1/16, 1/4, 1/2, 1/8, 1/16 ab. Um die Zeichen redundanzmindernd auf eine Binärquelle abzubilden, soll eine Huffman-Codierung durchgeführt werden. Beurteilen Sie die Wirksamkeit der Codierung!

1.5 Der folgende Ausschnitt aus dem Symbolstrom einer Nachrichtenquelle sei typisch für die Auftrittwahrscheinlichkeiten der (statistisch unabhängigen) Symbole:
... a a b a c a a a b a ...

(a) Wie groß ist die Entropie der Quelle?

(b) Die Quelle soll binär entsprechend des Huffman-Verfahrens codiert werden. Wie lauten die Codeworte? Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge sowie die relative Redundanz der Codewörter!

(c) Die mittlere Codewortlänge soll durch Blockbildung von je n Primärsymbolen gegenüber (b) reduziert werden. Wieviele Sekundärzeichen besitzt die entstandene erweiterte Quelle? Welche obere Schranke gilt bzgl. der mittleren Codewortlänge?

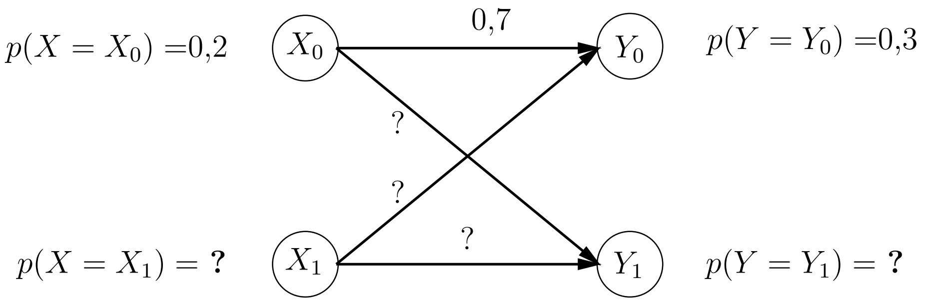
(d) Bilden Sie eine erweiterte Quelle, indem Sie jeweils 2 Primärzeichen zu einem neuen Sekundärzeichen zusammenfassen, und führen Sie eine Huffman-Codierung bzgl. der Sekundärzeichen durch! Um wieviel Prozent kann die mittlere Codewortlänge gegenüber b) reduziert werden?

1.6 Für eine Binärquelle (aufeinanderfolgende Zeichen seien statistisch unabhängig) ist eine redundanzmindernde Codierung zu entwickeln. Dabei sollen mittels Blockbildung jeweils $n = 3$ Primärsymbole zu Sekundärsymbolen zusammengefasst und anschließend nach dem Huffman-Verfahren codiert werden.

Symbol	p_i
A	0,9
B	0,1

Berechnen Sie die mittlere Codewortlänge sowie die relative Redundanz der Codewörter!

1.7 Gegeben ist folgender diskreter Kanal mit den Zufallsvariablen X am Sender und Y am Empfänger:



(a) Ergänzen Sie die durch ein Fragezeichen gekennzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

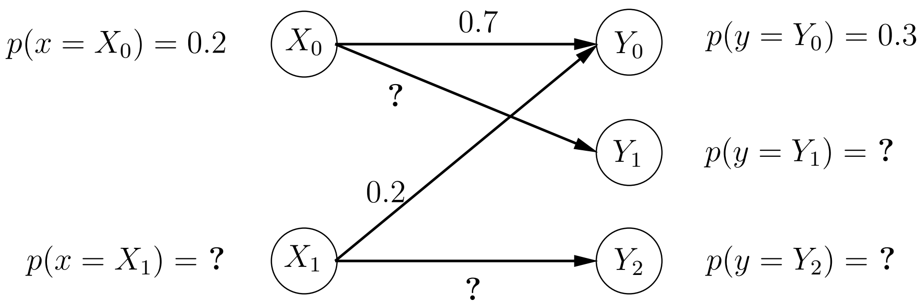
(b) Wie groß ist die Entropie $H(X)$ am Eingang?

(c) Wie groß ist die Entropie $H(Y)$ am Ausgang?

(d) Wie groß ist die bedingte Entropie bzw. die Irrelevanz $H(Y|X)$?

(e) Wie groß ist die Transinformation $H(X;Y)$?

1.8 Gegeben ist folgender diskreter Kanal:



(a) Ergänzen Sie die durch ein Fragezeichen gekennzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

(b) Wie groß ist die Entropie $H(X)$ am Eingang?

(c) die Entropie $H(Y)$ am Ausgang?

(d) die Irrelevanz $H(Y|X)$?

(e) die Transinformation $H(X;Y)$?

1.9 Wie groß ist die differentielle Entropie einer stetigen Zufallsvariablen X, wenn für deren Verteilungsdichtefunktion gilt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für} \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

X ist demzufolge gleichverteilt und amplitudenbegrenzt.

Berechnen Sie außerdem die differentielle Entropie in Abhängigkeit der mittleren Leistung P der Zufallsvariablen X.

1.10 Wie groß ist die differentielle Entropie einer gaußverteilten, mittelwertfreien Zufallsvariablen X mit der mittleren Leistung P? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der vorherigen Aufgabe!

1.11 Mit Hilfe der Gibb'schen Ungleichung

$$+\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x) \cdot \mathrm{ld}\left[\frac{f_X(x)}{f_Y(x)}\right] \mathrm{d}x \leq 0$$

lässt sich zeigen, dass unter der Randbedingung einer begrenzten mittleren Leistung die mittelwertfreie Gaußverteilung mit der größten möglichen Entropie einer stetigen Zufallsvariable korrespondiert. Beweisen Sie die Gibb'sche Ungleichung sowie die formulierte Aussage über den Maximalwert der Entropie!

Hinweis: Benutzen Sie bzgl. des Beweises der Gibb'schen Ungleichung die gültige Beziehung $(x - 1) \geq \ln(x)$.

1.12 Bestimmen Sie die Restbitfehlerwahrscheinlichkeit eines Wiederholungscodes unter der Annahme eines symmetrischen Binärkanals! Geben Sie auch eine Näherungsformel an und berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Restbitfehlerwahrscheinlichkeit nach der Decodierung für die Codewortlängen 1, 3, 5, 7, 9, 11 unter der Annahme einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $p_e = 10^{-2}$ (bezogen auf die gesendeten Binärzeichen)!